

Notons  $x$  le nombre de poules,  $y$  celui de lapins et  $z$  celui d'araignées. Notons  $a$  le nombre d'yeux de chaque araignée :

On cherche des entiers naturels  $x, y, z, a$  vérifiant :

$$\begin{cases} x + y + z & = & 26 \\ 2x + 2y + az & = & 142 \\ 2x + 4y + 8z & = & 148 \end{cases}$$

Introduisons une variable supplémentaire  $t = x + y$ . Le système est équivalent à :

$$\begin{cases} x + y & = & t \\ t + z & = & 26 \\ 2t + az & = & 142 \\ 2t + 2y + 8z & = & 148 \end{cases}$$

L'équation  $t + z = 26$  équivaut à  $t = 26 - z$ , ce qui permet d'éliminer  $t$  dans les deux dernières équations :

$$\begin{cases} x + y & = & t \\ t + z & = & 26 \\ (a - 2)z & = & 90 \\ 2y + 6z & = & 96 \end{cases}$$

On peut diviser par deux dans la dernière équation :

$$\begin{cases} x + y & = & t \\ t + z & = & 26 \\ (a - 2)z & = & 90 \\ y + 3z & = & 48 \end{cases}$$

Si  $(x, y, z, t)$  est une solution, la troisième équation implique que  $z$  est un diviseur de  $90 = 2 \cdot 3^2 \cdot 5$ , c'est-à-dire  $z \in \{1, 2, 3, 5, 6, 9, 10, 15, 18, 30, 45, 90\}$ . L'inconnue  $y$  est positive ; grâce à la dernière équation, on obtient  $y = 48 - 3z \geq 0$ , d'où  $z \leq \frac{48}{3} = 16$ . La première équation implique que  $y \leq t$ . Les deuxième et dernière équations permettent d'exprimer  $t$  et  $y$  en fonction de  $z$ , donc  $48 - 3z \leq 26 - z$ , ce qui équivaut à  $2z \geq 22$ , autrement dit  $z \geq 11$ . Le seul diviseur de 90 compris entre 11 et 16 étant 15, on a forcément  $z = 15$ . (Alternativement, sans donner la liste de tous les diviseurs de 90, on peut d'abord obtenir  $11 \leq z \leq 16$  puis vérifier que dans l'ensemble  $\{11, 12, 13, 14, 15, 16\}$ , il n'y a que 15 qui divise 90.)

Si  $(x, y, z, t)$  est une solution, on a montré que  $z = 15$ . La troisième équation donne alors  $a - 2 = 6$ , c'est-à-dire  $a = 8$  (donc, si le problème n'est pas incohérent, la réponse est que les araignées ont 8 yeux). On obtient  $y = 48 - 3z = 3$ , puis  $t = 26 - z = 11$  et enfin  $x = t - y = 8$  (et les quatre équations sont bien satisfaites). Il y avait 8 poules, 3 lapins et 15 araignées ayant chacune 8 yeux.